Funções e equações

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

RESUMO E OBJETIVOS

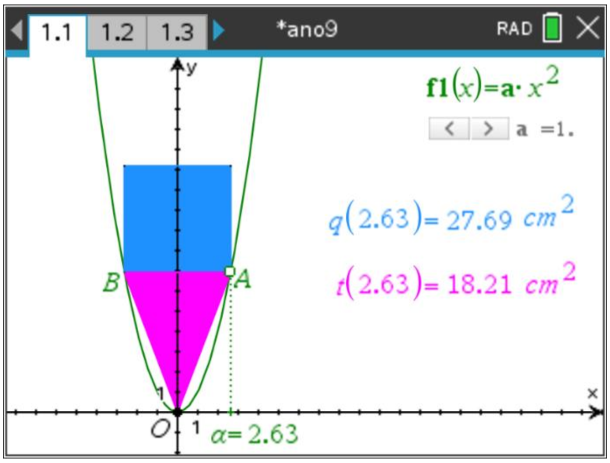
Os alunos irão utilizar a tecnologia TI-Nspire para fazer conjeturas à volta de um problema envolvendo funções definidas por ax^2, numa estreita conexão com a geometria. Deverão também validar as conjeturas com recurso à prova. Com esta atividade pretende-se:

- Aplicar o conhecimento da função afim, da função de proporcionalidade inversa e da função do tipo ax^2.
- Compreender o significado geométrico da representação gráfica de uma função.
- Resolver equações polinomiais, nomeadamente através da lei do anulamento do produto.
- Resolver problemas envolvendo geometria e funções

MATERIAIS E PREPARAÇÃO

- TI-Nspire CX ou CX II-T
- Ficheiro func_eq.tns
- Folha de tarefas

TAREFAS E INVESTIGAÇÕES PARA OS ALUNOS



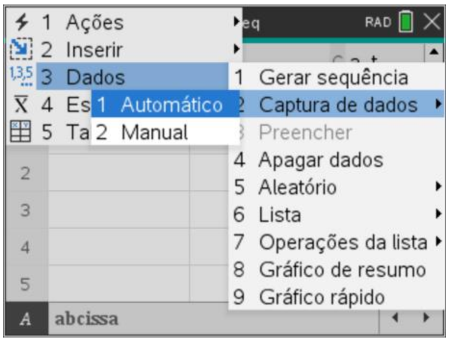
Ao manipular a aplicação pode perceber-se, a partir da observação dos polígonos, mas sobretudo pela evolução dos valores, que sendo crescentes as medidas das áreas do quadrado e do triângulo, há uma posição de A a partir da qual a área do triângulo ultrapassa a área do quadrado, começando inferior.

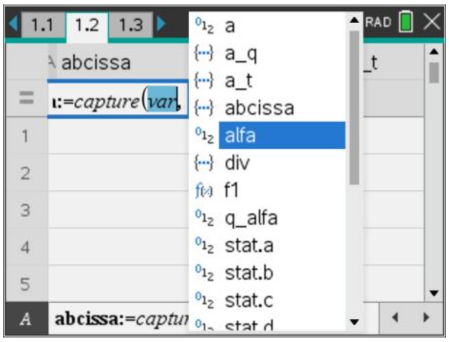
Já entender uma regularidade na relação entre estas duas medidas e a da abcissa de A e entre uma e outra não se prevê de conjetura fácil, pelo que é aconselhável uma observação de muitos exemplos, o que pode ser feito com tremenda eficácia recorrendo às potencialidades na tecnologia em que se baseia a aplicação fornecida.

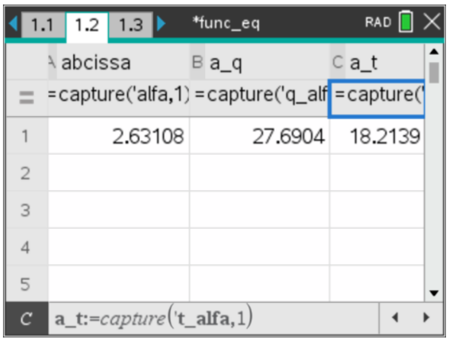
Funções e equações

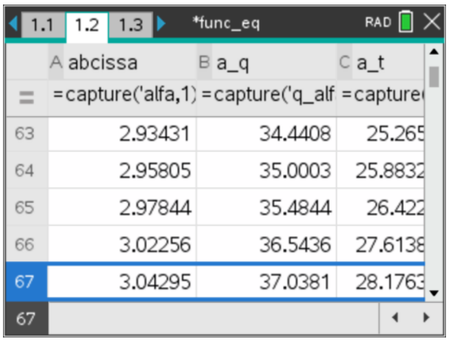
Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

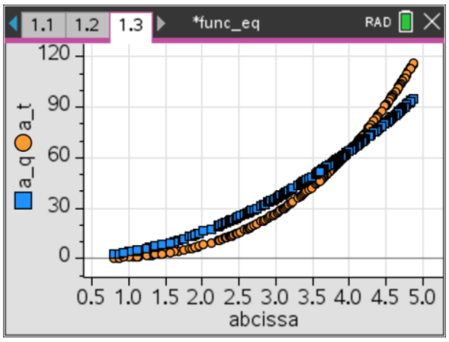
Fazendo uma captura automática de dados para uma página de listas e folha de cálculo e movimentando o ponto A, estão registados muitos valores que relacionam estas variáveis. A passagem para uma página de dados e estatística para representação das respetivas nuvens de pontos facilita por completo a formação de conjeturas e ilumina o caminho da demonstração.











Observa-se que entre as variáveis α e q e entre α e t há relações de regularidade e ainda que poderá ser quando $\alpha = 4$ que ocorre a passagem para o triângulo como o polígono de maior área.

Para a prova do que se poderá conjeturar, será efetuado um trabalho analítico em função do coeficiente da equação quadrática, que aliás é a proposta de extensão. Facilmente o professor compreenderá quais são os resultados se a=1.

Ora $q(\alpha) = [\alpha - (-\alpha)]^2 = 4\alpha^2$, pelo que se pode concluir que a medida da área do quadrado não depende do coeficiente da função definida por ax^2 . Uma conjetura deste facto pode ocorrer ao mudar o seletor com o valor de a. Já a medida da área do triângulo varia com a alteração desse parâmetro, pois $t(\alpha) = \frac{1}{2} \times 2\alpha \times a\alpha^2 = a\alpha^3$.

Temos então que, enquanto a primeira relação é quadrática, a segunda é cúbica. Embora a função cúbica não seja alvo de estudo no 9º ano, é neste nível de ensino admissível na resolução de algumas equações e ocorre ganho ao nível da compreensão da função cúbica a tratar no 10º ano. Da equação $a\alpha^3 = 4\alpha^2$, vem que $\alpha^2(a\alpha - 4) = 0$, donde $\alpha = \frac{4}{a}$. Deste modo confirma-se que o ponto de coordenadas $(4{,}16)$ é a posição de A em que a medida da área do triângulo ultrapassa a do quadrado. No geral esse ponto tem coordenadas $(\alpha, a\alpha^2)$.

Funções e equações

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

Ficam assim tratadas as questões 1 e 2 e a questão 3 está, até aqui, parcialmente respondida. Importa perceber melhor se há alguma regularidade na relação entre as medidas destas áreas, o que aparentemente e pelo que se fez parece que sim.

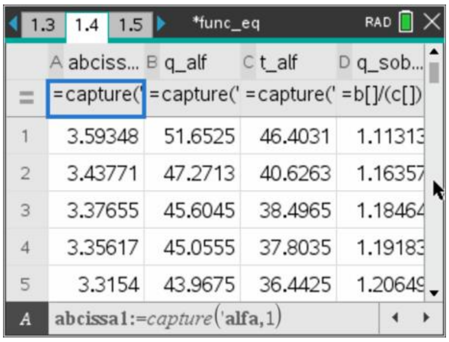
Algebricamente pode concluir-se que

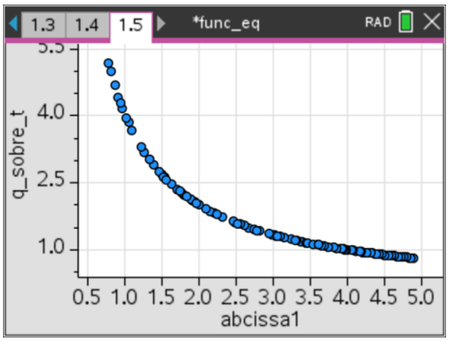
$$\frac{q(\alpha)}{t(\alpha)} = \frac{4\alpha^2}{a\alpha^3} = \frac{4}{a\alpha}$$

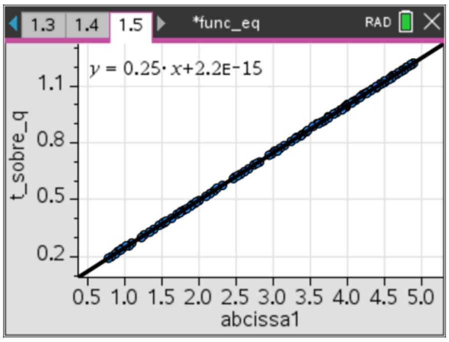
e que

$$\frac{t(\alpha)}{q(\alpha)} = \frac{a}{4}\alpha\,,$$

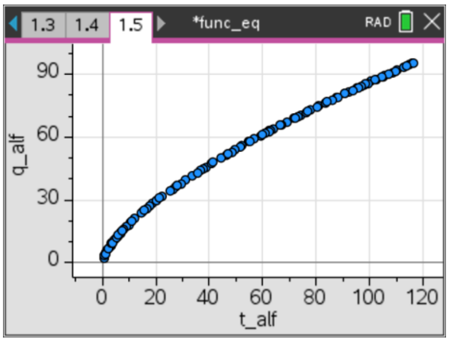
ou seja, uma razão descrita por uma função de proporcionalidade inversa no primeiro caso e linear no segundo caso. Estas conclusões teriam sido, naturalmente, antecedidas de um trabalho com muitos dados, como o que foi feito anteriormente. As imagens seguintes revelam este trabalho para o caso particular em que $a = 1$.

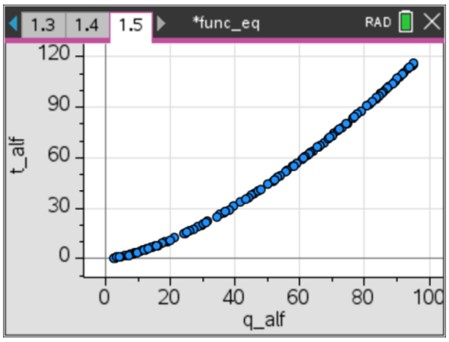






Aproveitando esta recolha de dados, facilmente se observa o que está nas figuras abaixo.





Uma curiosa relação, cujo tratamento analítico claramente não cabe no âmbito do trabalho no 9º ano, mas que o leitor poderá ter curiosidade e interesse em aprofundar.