Complexos Simétricos

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

RESUMO E OBJETIVOS

Os alunos irão utilizar a tecnologia TI-Nspire para tirar conclusões sobre a relação geométrica entre os afixos de dois números complexos e dos respetivos simétricos, num polígono por eles definido, relativo ao tema dos números complexos, do 12º ano de escolaridade. Neste sentido será necessário mobilizar conhecimentos anteriores de diferentes temas de modo a validar conjeturas que se farão com muita vantagem com a manipulação de uma aplicação fornecida.

MATERIAIS E PREPARAÇÃO

- TI-Nspire CX ou CX II-T
- Ficheiro ramos complexos2.tns
- Folha de tarefas

TAREFAS E INVESTIGAÇÕES PARA OS ALUNOS

A resposta à **1ª questão** é relativamente simples, óbvia com a manipulação da aplicação caso não consiga o aluno obtê-la de imediato. Aliás, esta tarefa pode até ser trabalhada após o aluno ter aprendido que os afixos de um número complexo e do respetivo simétrico são simétricos relativmente à origem do plano de Argand. É, no entanto, uma pergunta necessária e útil para enquadrar o trabalho seguinte.

Para tratar algebrcamente as respostas, considere-se $z_A = a + bi$ (afixo A) e $z_B = c + di$ (afixo B). Designem-se ainda os afixos de $-z_A$ por A' e de $-z_b$ por B'.

Para responder à **2ª questão**, **e seguintes**, esperam-se algumas dificuldades, sobretudo na validação algébrica de conjeturas. Uma análise a partir de uma organização em tabela relativa às coordenadas dos afixos, pode simplificar este trabalho.

	$b = d$	$b \neq d$
$a = c$	$A(a,b); B(a,b); A'(-a,-b); B'(-a,-b)$	$A(a,b); B(a,d); A'(-a,-b); B'(-a,-d)$
$a \neq c$	$A(a,b); B(c,b); A'(-a,-b); B'(-c,-b)$	$A(a,b); B(c,d); A'(-a,-b); B'(-c,-d)$

Conmecemos por analizar a situação em que $\boldsymbol{a = c \wedge b = d}$:

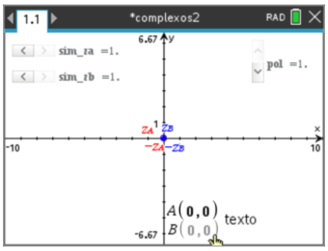
Neste caso, há apenas dois pontos, eventualmente distintos. A manipulação da aplicação rapidamente vai suscitar a necessidade de uma subdivisão deste caso, como na tabela seguinte.

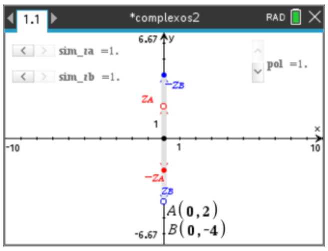
Complexos Simétricos

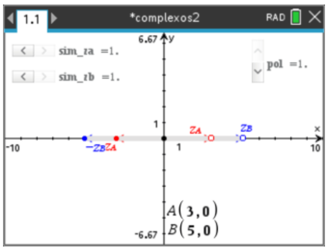
Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

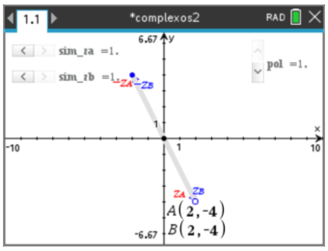
	$b = 0$	$b \neq 0$
$a = 0$	$A(0{,}0); B(0{,}0); A'(0{,}0); B'(0{,}0)$	$A(0,b); B(0,b); A'(0,-b); B'(0,-b)$
$a \neq 0$	$A(a,0); B(a,0); A'(-a,0); B'(-a,0)$	$A(a,b); B(a,b); A'(-a,-b); B'(-a,-b)$

Se as coordenadas forem nulas, o polígono é degenerdo num ponto, a origem do referencial. Se apenas uma das coordenadas for numa, facilmente se comprova que o polígono degenera num segmento de reta sobre o eixo imaginário ($a = 0$) ou sobre o eixo real ($b = 0$), sendo a origem do plano de Argand o ponto médio desse segmento de reta. Já se nenhuma das coordenadas for nula, tem-se que $\overrightarrow{AA'} = (-2a, -2b) = \overrightarrow{BB'}$. Isto significa que os quatro pontos estão alinhados sobre uma reta, naturalmente passando pela origem, e de declive b/a, concluindo-se por isso que mais uma vez o polígono é degenerado num segmento de reta que tem a origem como ponto médio, mas agora não está nos eixos. Ocupa os quadrantes ímpares se os sinais de $Re(z_A)$ e $Im(z_A)$ forem iguais e ocupa os quadrantes pares se estes sinais forem contrários.



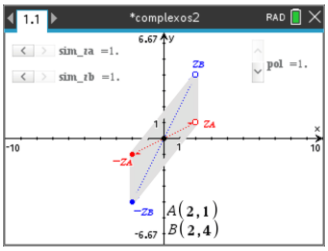


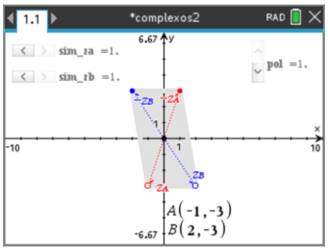


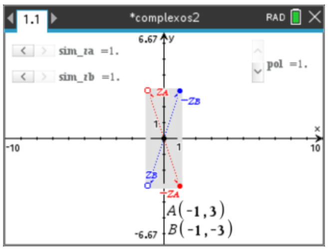


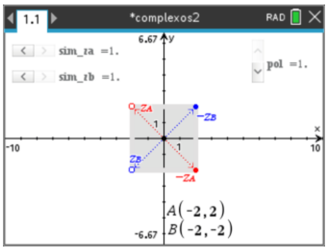
Analizemos agora a situação em que $\boldsymbol{a = c \wedge b \neq d}$, a qual pode ser vista como a situação em que $\boldsymbol{a \neq c \wedge b = d}$.

Se os complexos têm a mesma parte real, e tendo em consideração que os respetivos simétricos também terão, o polígono será um paralelogramo com dois lados opostos paralelos ao eixo imaginário. Se por outro lado, as partes imaginárias forem iguais, o mesmo tipo de polígono será definido, agora com dois lados opostos paralelos ao eixo real. Um desafio surgirá, que é o de descobrir em que circunstâncias se tem um retângulo com os lados paralelos aos eixos, e quando é esse retângulo quadrado.









Um trabalho mais analítico apoiará o trabalho de manipulação da aplicação para provar as conjeturas. Considere-se a situação em que $\boldsymbol{a = c \wedge b \neq d}$, sendo a outra perfeitamente análoga.

Complexos Simétricos

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

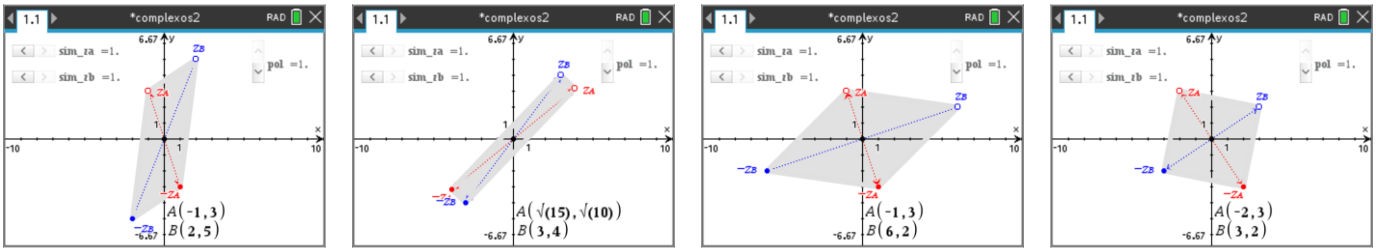
Ora, $A(a,b), B(a,d), A'(-a,-b)$ e $B'(-a,-d)$.

Tem-se que $\overrightarrow{AB} = (0, d-b) = \overrightarrow{B'A'}$ e ainda que $\overrightarrow{BA'} = (-2a, -b-d) = \overrightarrow{AB'}$ e consequentemente a conclusão de que o polígono é um paralelogramo.

Ora, se b e d forem simétricos, tem-se que $\overrightarrow{AB} = (0, -2b) = \overrightarrow{B'A'}$ e que $\overrightarrow{BA'} = (-2a, 0) = \overrightarrow{AB'}$, concluindo-se assim que o paralelogramo é retângulo, de lados paralelos aos eixos, e que quando $|a| = |b|$, é um quadrado.

Considere-se agora, excluidas as situações anteriorews, que $\boldsymbol{a \neq c \wedge b \neq d}$**.**

Tem-se que $A(a,b); B(c,d); A'(-a,-b)$ e $B'(-c,-b)$, donde $\overrightarrow{AB} = (c-a, d-b) = \overrightarrow{B'A'}$ e $\overrightarrow{A'B} = (c+a, d+b) = \overrightarrow{B'A}$. Temos então que, nestas circunstâncias, o polígono é sempre um paralelogramo sem lados paralelos aos eixos.



Para que o paralelogramo seja retângulo, os lados consecutivos têm se ser perpendiculares, o que se pode traduzir por pela exprssão $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB'} = 0$, que resulta em $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.

Para que o paralelogramo seja losango, as diagonais têm se ser perpendiculares, o que se pode traduzir por pela exprssão $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BB'} = 0$, que resulta em $ac + bd = 0$.

Considerando as duas condições anteriores, temos naturalmente o quadrado.

Estas relações podem suscitar regras práticas a aplicar à definição do números complexos z_A e z_B para obter o polígono pretendido.

As respostas às questões colcadas encontram-se neste estudo exaustivo, o que permite também perceber porque razão não é possível obter outro tipo de elementos geométricos, o que dá resposta à última questão.